Задание № 7 Собственные числа и собственные векторы

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

Собственные числа матрицы

Пусть дана квадратная матрица А порядка n. В приложениях теории матриц большую важность имеет вопрос: существует ли действительное число  и ненулевой вектор  такие, что



Если это так, то число  называется *собственным числом* матрицы , а вектор  - *собственным вектором* матрицы , соответствующим собственному числу .

Теорема (свойства собственных векторов)

1. Если  - собственный вектор матицы А, то для любого числа  вектор  также является собственным вектором той же матрицы
2. Если  и  - собственные векторы матрицы А, соответствующие одному и тому же собственному числу, то вектор  также является собственным вектором той же матрицы (и соответствует тому же собственному числу)

*Доказательство*: 1) Пусть , тогда 

2)Пусть  и , тогда . *Теорема доказана.*

Поскольку , то , где Е – единичная матрица, то , .

Последнее матричное равенство является системой линейных уравнений, в которой неизвестными являются координаты вектора . Эта система имеет очевидное решение . Если определитель системы отличен от 0, то эта система будет иметь единственное решение, а именно, . Чтобы система имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен 0:



Поскольку , то



После раскрытия определителя в равенстве



получится алгебраическое уравнение степени n. Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы А.

*Примеры:* Найти собственные числа матриц  и 

*Решение:* 

Полученное квадратное уравнение имеет корни , являющиеся собственными числами матрицы .





Собственными числами матрицы В являются 

Нахождение собственных векторов матрицы

Пусть - собственное число матрицы . Рассмотрим систему линейных уравнений . Определитель этой системы равен нулю и система имеет бесконечно много решений. Найдем фундаментальную систему решений системы уравнений . Любой вектор, являющийся линейной комбинацией векторов фундаментальной системы, является собственным вектором матрицы А, соответствующим собственному числу .

*Пример:* Найти собственные векторы матрицы 

Собственные числа матрицы В равны .

При  система уравнений имеет вид



Определитель этой системы , так в нем первая и третья строки одинаковы. Минор . Поэтому рассматриваем систему уравнений . Полагая , получим систему , имеющую решение . Единственный вектор фундаментальной системы равен  и любой собственный вектор, соответствующий собственному числу , будет иметь вид .

При : . Переходим к системе . При  получим  и любой собственный вектор, соответствующий собственному числу , имеет вид .

При : . Переходим к системе .

При :  и в этом случае все собственные векторы имеют вид .

В дальнейшем нас будут интересовать собственные векторы единичной длины, т. е. в качестве параметра  нужно будет брать длину найденного собственного вектора.

**Самостоятельная работа:**

1. Найти действительные собственные числа и векторы матриц: а) ; б) ;
2. Найти действительные собственные числа и векторы матрицы ;
3. Найти действительные собственные числа и векторы матрицы 
4. Найти действительные собственные числа и векторы матрицы 

**Ответы:**

1. а) собственному числу  соответствует собственный вектор , собственному числу  соответствует собственный вектор ; б) ;

2. собственному числу  соответствует собственный вектор , собственному числу  соответствует собственный вектор ;

3. собственному числу  соответствуют два линейно независимых собственных вектора -  и , собственному числу  соответствует собственный вектор .

4. Единственному действительному собственному числу  соответствует собственный вектор . Имеется единственное одномерное инвариантное подпространство  с базисом из вектора .